OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
22 ianuarie 2011

CLASA A IX-A
Programa TC+CD (4 ore)

1. **a.)** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{32}$.

   b.) Să se demonstreze că numerele de şase cifre de forma $\overline{ababab}$ nu pot avea factori primi mai mult de două cifre.

2. Rezolvați ecuația : $\left[2\sqrt{2011}\cdot x\right]\cdot\left\{2\sqrt{2011}\cdot x\right\}=2011x^2-1$ unde $\left[a\right],\left\{a\right\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

3. Se consideră şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1=1, a_2=2$ şi $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n, n\geq 1$.

   a.) Arătați că şirul $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$, definit prin: $b_n=a_{n+1}-a_n$, este o progresie geometrică.

   b.) Determinați a_n.

4. **a.)** Dacă *M* este un punct situat pe latura *BC* al triunghiului *ABC* astfel încât $\overrightarrow{MB}=\lambda\overrightarrow{MC}$, atunci demonstrați că are loc egalitatea vectorială: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{1-\lambda}\left(\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AC}\right)$.

   b.) În triunghiul dreptunghic *ABC*, $m\left(\sphericalangle A\right)=90^0$, punctele *M, N* şi *P* sunt picioarele înălțimii, bisectoarei respectiv a medianei trase din vârful *A*. Folosind formula de la punctul **a.)** să se exprime pe $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$ $\overrightarrow{AP}$ cu ajutorul lui $\overrightarrow{AB}$şi $\overrightarrow{AC}$.

   c.) Să se arate că dacă *a, b, c* sunt lungimile laturilor triunghiului dreptunghic *ABC* are loc relația: $\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\cdot\overrightarrow{AM}+\left[1-\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\right]\cdot\overrightarrow{AP}$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore